Енді $Q_n(x) \geq 0$ $\forall x \in [0, 1]$ және (44) , (47) , (50) және (51) теңсіздіктерінен $\forall x \in [0,1]$

$$|P_n(x)\ \ f(x)| = \left|\int_{-1}^{1}[f(x+t)-f(x)]Q_n(t)dt\right| \leq$$

$$\leq \int_{-1}^{1}|f(x+t)-f(x)|Q_n(t)dt \leq 2A\int_{-1}^{-\delta}Q_n(t)dt + \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta}Q_n(t)dt + 2A\int_{\delta}^{1}Q_n(t) \leq 4A\sqrt{n}(1-\delta^2)^n + \frac{\varepsilon}{2} \prec \varepsilon,$$

өйткені жеткілікті үлкен n мәндерінде 4A $\sqrt{n}$ $(1\text{-}\delta^2)^n < \frac{\varepsilon}{2}$.

<u>Салдар.</u> Егер $f(x) \in C^{к}[0,1] \Rightarrow \exists\{P_n(x)\}, ..., \{P_n^{(k)}(x)\} \overset{[0,1]}{\rightarrow} f(x), f'(x), ..., f^{(к)}(x)$.

<u>Дәлелдеу.</u> Шынында да, жалпылығын шектемей-ақ әрбір $f(x),..., f^{(к)}(x)$ функцияларын $x=0$, $x=1$ нүктелерінде нөлге тең деп ұйғаруға болады, егер олай болмаған күнде, біз дәрежесі 2к-ге тең $P_{2k}(x)$ көпмүшелігін g(x)= $f(x)$ - $P_{2k}(x)$ осы шарттарды қанағаттандыратындай етіп алар едік. Сондықтан $f(x)$ функциясын бүкіл сан өсіне [0 , 1] кесіндісінің сыртында нөлге тең деп жалғастырамыз. Сонымен жалғастырылған функция мен оның к-ші ретті барлық туындылары бүкіл сан өсінде бірқалыпты үзіліссіз болады. Сонда $P_n(x)$ арқылы (48) көпмүшелікті белгілеп, жоғарыдағы теореманы дәлелдегендей әрбір

$$P_n(x) - f(x)\ ,\ P_n'(x) - f'(x)\ ,...\ ,\ P_n^{(k)}(x) - P^{(k)}(x)$$

айырымдары [0 , 1] кесіндісінде бірқалыпты шексіз аз болады.

<u>Ескерту.</u> Бұл теорема m өлшемді $0 \leq x_i \leq m$ i=1,2,…,m , кубта үзіліссіз m айнымалысының $f(x_1,..., x_m)$ функциясы үшін де орындалады.

Әдебиеттер: [1], 178-185 б., [2] (2-бөлім).

№20 ДӘРІС. ПЕРИОДТЫ ФУНКЦИЯЛАР. ПЕРИОДТЫ СОЗЫНДЫ.

Дәрістің мақсаты: Периодты функцияның анықтамасы, оның негізгі қасиеттерін меңгеру. Функцияның периодты созындысының анықтамасы, функцияның периодты созындысын құра білу. Кесіндінің ұштарында функцияның мәндері бірдей және әр түрлі болған жағдайда периодты созынды құруды меңгеру.

1. Периодты функциялар.
2. Периодты созынды.

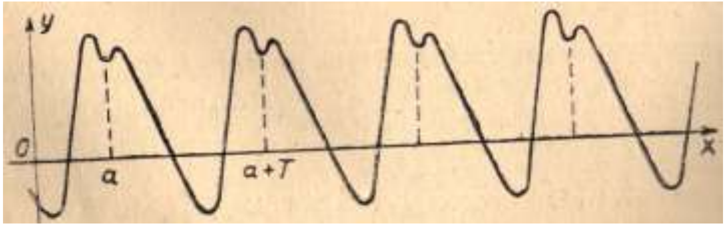
Анықтама. Егер ***f(x)*** функциясының анықталу облысындағы ***x-тің*** кез келген мәні үшін

$$f(x+T) = f(x) \qquad (1)$$

теңдігі орындалатындай бір ***T*** саны бар болса, ***f(x)*** периодты функция, ***T*** — ол функцияның периоды деп аталады.

Периодты функцияларға қарапайым мысалдар ретінде әдеттегі тригонометриялық функциялар ***sinx, cosx, tgx, ctgx*** т.т. алуға болады.

Периодты функцияның графигі оның қандай да болса бір ***[a, a + T]*** кесіндісіндегі графигін қайталау жолымен салынады (1-сурет).



1-сурет

Периодты функцияның негізгі қасиеттері:

1°. Егер ***T*** саны ***f(x)*** функциясының периоды болса, ***nT*** *(n* бүтін сан) сандары да сол функцияның периоды болады, демек, ***T*** саны ***f (x)*** функциясының оң периодтарының ең кішісі болады.

2°. Периоды тең функциялардың қосындысы, айырымы, көбейтіндісі және қатынасы да периоды сондай функция болады.

3°. ***f(x)*** периодты функциясы период ұзындығы Т-ға тең кейбір кесіндіде интегралданса, ол функция ұзындығы Т-ға тең кез келген кесіндіде де интегралданады және интегралдың мәні өзгермейді, яғни кез келген ***a*** мен ***b*** үшін

$$\int_a^{b+T} f(x)\,dx = \int_b^{b+T} f(x)\,dx \qquad (2)$$

болады.

Шынында: ***f(x)*** функциясы ***[a, a + T]*** (мұнда ***0<a<T)*** кесіндісінде интегралданатын болсын. Онда

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^{T} f(x)\,dx + \int_T^{a+T} f(x)\,dx \qquad (3)$$

болатыны белгілі.

(3) теңдіктің оң жағындағы екінші интегралды есептелік. Ол үшін көмекші айнымалы *u* -ды

$$u = x - T \qquad (4)$$

формуласымен енгізсек,

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^{a} f(u+T)\,d(u+T) = \int_0^{a} f(z)\,dz \qquad (5)$$

болады. Енді (5)-ні (3)-ге койсақ,

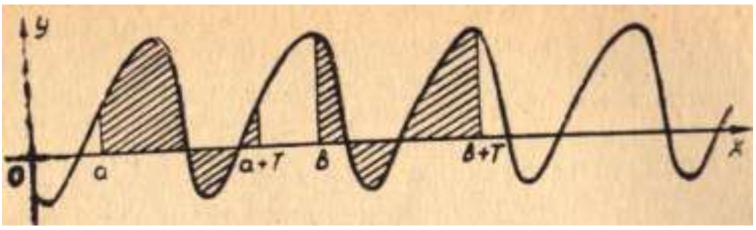
$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^{T} f(x)\,dx + \int_0^{a} f(z)\,dz = \int_0^{T} f(x)\,dx \qquad (6)$$

болып шығады. Дәл осы сияқты

$$\int_b^{b+T} f(x)\,dx = \int_0^{T} f(x)\,dx \qquad (7)$$

болатыны дәлелденеді. Сонымен (2) теңдік дәлелденді.

Бұл касиеттің геометриялық мағынасы мынадай: периодты функция ***f(x)***-тің графигімен жоғарыдан, ***x = a, x=a + T*** түзулерімен бүйірлерінен, ***OX*** осімен төменнен шенелген фигураның ауданы ***f(x)***-тің графигі, ***OX*** осі, ***x=b, x = b + T*** түзулерімен шенелген фигураның ауданына тең болады; сонымен бірге ***OX*** осінен жоғары жатқан аудандар « + » таңбасымен, ***OX*** осінен төмен жатқан аудандар « —» таңбасымен алынады (2-сурет).



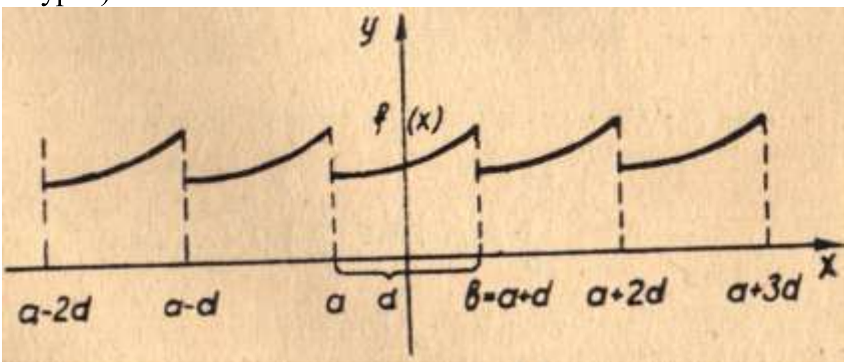
2-сурет

Периодты созынды. Фурье қатарлары теориясы периодты функцияларға бейімделген. Бірақ ақырлы ***[a, b]*** кесіндісінде анықталған периодсыз функциялардың (үзілісті функциялар да соның ішінде) анағұрлым кең кластарын да сол теорияның жәрдемімен зерттеуге болады.

Кейбір ақырлы ***[a, b]*** кесіндісінде анықталған периодсыз функцияны бүкіл сандар осінде периодты болатын етіп түрлендіру үшін берілген функцияны ***[a, b]*** кесіндісінің сыртына периодты созу әдісі колданылады.

Анықтама. ***[a, b]*** кесіндісінде берілген ***f(x)*** функциясының периодты созындысы деп бүкіл сандар осінің бойында анықталған, ***[a, b]*** кесіндісінде ***f(x)*** функциясына айналатын және периоды сол кесіндінің үзындығына тең ***F(x)*** функциясын айтадды.

[a, b] кесіндісінің ұзындығы ***d-ға*** тең болсын. Сонда ***f(x)*** функциясының ***[a, b]*** кесіндісінің сыртындағы периодты созындысы ***F(x)-тің*** геометриялық мағынасы ***f(x)*** функциясының графигін ***OX*** осі бойымен ***d, 2d, nd, ...*** қашыктықтарына параллель көшіру болып табылады (3-сурет).



3- сурет.

Ұзындығы 2π-ге тең [—π,π] кесіндісінде анықталған ***f (x)*** периодсыз функциясына ерекше көңіл бөлу қажет, өйткені ұзындығы $2l$-ге тең кез келген $[-l, l]$ кесіндісінде анықталған $\varphi(x)$ функциясын

$$x = \frac{l}{\pi}u \qquad (8)$$

ауыстырмасының жәрдемімен

$$\varphi(x) = \varphi\left(\frac{l}{\pi}u\right) = \psi(u), \qquad -\pi \le u \le \pi \qquad (9)$$

түріне келтіруге болады.

Егер $f(-\pi)=f(\pi)$ болса, периодты созынды f(x)-тің [—π,π]-дегі графигін OX осінің бойында карапайым қайталау болып шығады.

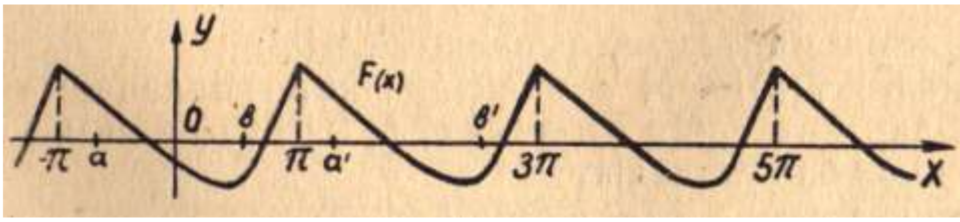
Ал егер $f(-\pi)\neq f(\pi)$ болған жағдайда $f(-\pi)$ *мен* $f(\pi)$ мәндерін өзгертпейінше [—π,π]-дің сыртында периодты созындыны іске асыра алмаймыз, өйткені периодты функцияның анықтамасына сәйкес $F(x)=F(x+2\pi)$, демек, $F(-\pi)$ =F(π) теңдіктері орындалуы міндет.

Бүл қиыншылықтан екі түрлі тәсілмен құтылуға болады:

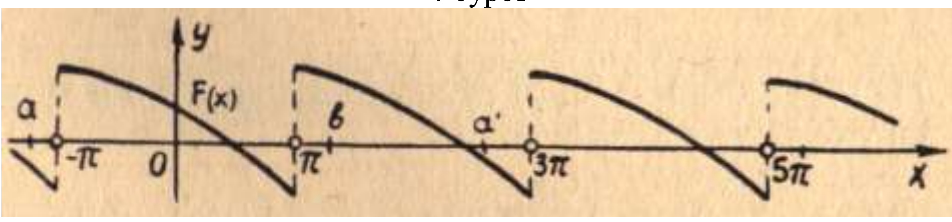
1) Не $f(-\pi)$ мен $f(\pi)$ мәндерін қарастырудан мүлдем шығарып тастаймыз, яғни x=$\pm\pi$ нүктелерінде $f(x)$ функциясы анықталмаған деп аламыз; сол себепті оның периодты созындысы $F(x)$-те $x=(2k-1)\pi$ $(k = 0, \pm1, \pm2)$ нүктелерінде анықталмайды.

2) f(—π) пен f(π) мәндерін өзімізше өзгертіп, өз ара тең етіп аламыз.

Келешек мүдделер үшін пайдалы мына ескертпеге тоқтала кетелік. Егер $[a, b]\in[-\pi,\pi]$ болса, $f(x)$ функциясының $[a, b]$-нің сыртындағы периодты созындысы $F(x)$-ті тұрғызғанда $F(-\pi)$=F(π) деп алу, ал егер $[-\pi,\pi]\in[a, b]$ болған жағдайда $F(-\pi)=F(\pi)=\dfrac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}$ деп алған ыңғайлы болатынын ескертеміз (4,5-суреттер).



4-сурет



5-сурет

Ескертпе 1. Бойында $f(x)$ функциясы анықталған, ұзындығы $2l$-ге тең кез келген кесіндіні координаталар басына сим-метриялы деп санауға болады, өйткені олай болмаған күнде аналитикалық геометриядан белгілі формула бойынша координаталар басын кесіндінің ортасына көшіруге болады.

Ескертпе 2. $[a, a+2\pi]$ кесіндісінде берілген f(x) периодсыз функциясын $[-\pi,\pi]$ кесіндісінде берілген жағдайдағыдай периодты созуға болады, бірақ, егер $f(a)\neq f(a + 2\pi)$ болған кезде периодты созынды $F(x)$-тің $x = a + 2k\pi$ (k = 0, ±1, ±2, ...) нуктелерінде үзілісі болады.

Нақтылы берілген есептер жағдайында кейде жұп, кейде тақ периодты созынды пайдалы болатынын ескерте кетелік. Сонымен бірге жұп периодты созындының графигі ординаталар осіне, так периодты созындының графигі— координаталар басына симметриялы болатынын есте тұтқан жөн (6,7-суреттер)